

累加累乘

一、解答题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 2n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若首项为3的数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} - b_n = a_{n+1}$, 求数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n

【答案】(1) $a_n = 2n + 1$

(2) $\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

【难度】0.65

【知识点】裂项相消法求和、利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项、累加法求数列通项

【分析】(1)先求得 $a_1 = S_1 = 3$, 再利用 $n \geq 2$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求解, 最后验证 $a_1 = 3$ 是否满足, 即可得解.

(2)先利用累加法求得 $b_n = n^2 + 2n$, 然后利用裂项相消法求和即可.

【详解】(1)由题意可得 $S_n = n^2 + 2n$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n - (n-1)^2 - 2(n-1) = 2n + 1$,

因为 $a_1 = 3$ 满足上式, 所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 1$;

(2)因为 $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} = 2n + 3$, 且 $b_1 = 3$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n = n^2 + 2n$,

当 $n=1$ 时, $b_1 = 3$ 也符合上式, 所以 $b_n = n^2 + 2n$,

所以 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{n \times (n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$,

所以 $T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 3n - 2$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 且 $a_1 = 1$

(1) 求 a_2, a_3 .

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) $a_2 = 2$, $a_3 = 6$

$$(2) a_n = \frac{3n^2 - 7n + 6}{2} \quad (n \in \mathbb{N}_+)$$

【难度】0.65

【知识点】累加法求数列通项、根据数列递推公式写出数列的项

【分析】(1) 由 $a_{n+1} = a_n + 3n - 2$, 且 $a_1 = 1$, 代入运算可得 a_2, a_3 ;

(2) 由 $a_{n+1} = a_n + 3n - 2$, 利用累加法求通项.

【详解】(1) 因为 $a_{n+1} = a_n + 3n - 2$, 且 $a_1 = 1$,

所以 $a_2 = a_1 + 3 - 2 = 1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 3 \times 2 - 2 = 2 + 4 = 6$.

(2) 由 $a_{n+1} = a_n + 3n - 2$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 得 $a_{n+1} - a_n = 3n - 2$,

$$\therefore a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \quad (n \geq 2)$$

$$= 3(n-1) - 2 + 3(n-2) - 2 + \cdots + 3 \times 1 - 2 + 1$$

$$= 3[(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1] - 2(n-1) + 1$$

$$= 3 \times \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} - 2(n-1) + 1 = \frac{3n^2 - 7n + 6}{2}, \text{ 又 } a_1 = 1 \text{ 符合 } a_n = \frac{3n^2 - 7n + 6}{2},$$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{3n^2 - 7n + 6}{2}$.

3. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_2 = 6$, $S_6 = 42$, 且数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 的首项为 2, 且 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+2}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) $a_n = 2n$

$$(2) T_n = \frac{4n}{n+1}$$

【难度】0.65

【知识点】由 S_n 求通项公式、裂项相消法求和、等差数列通项公式的基本量计算、累乘法求数列通项

【分析】先根据等差数列的通项公式求数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的通项公式，进而得到 $S_n = n(n+1)$ ，再利用 $a_n = \begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 利用累乘法求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，再利用裂项相消求和法求 T_n .

【详解】(1) 由题意： $\frac{S_2}{2} = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{S_6}{6} = \frac{42}{6} = 7$,

又数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，设数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 D ,

$$\text{由 } \frac{S_6}{6} = \frac{S_2}{2} + 4D \Rightarrow 7 = 3 + 4D \Rightarrow D = 1.$$

$$\text{所以 } \frac{S_n}{n} = \frac{S_2}{2} + (n-2) \cdot D = 3 + n - 2 = n + 1.$$

$$\text{所以 } S_n = n(n+1).$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 1 \times 2 = 2,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n(n+1) - (n-1)n = 2n.$$

$n=1$ 时，上式也成立.

$$\text{所以 } a_n = 2n.$$

$$(2) \text{ 因为 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{2n}{2(n+2)} = \frac{n}{n+2},$$

$$\text{所以 } \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{3}, \frac{b_3}{b_2} = \frac{2}{4}, \frac{b_4}{b_3} = \frac{3}{5}, \dots, \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}.$$

$$\text{以上各式相乘, 可得当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{b_n}{b_1} = \frac{2}{n(n+1)},$$

$$\text{又 } b_1 = 2, \text{ 所以 } b_n = \frac{4}{n(n+1)} = 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{所以 } T_n = 4 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{4n}{n+1}.$$

4. 求下列数列的通项公式

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+2n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 求 a_n ;

(2) 正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=3\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$, 求 a_n .

【答案】(1) $a_n = n^2 - 2n + 2$

(2) $a_n = n \cdot 3^{n-1}$

【难度】0.65

【知识点】求等差数列前 n 项和、由递推关系式求通项公式、累乘法求数列通项、累加法求数列通项

【分析】(1) 利用累加法求得正确答案.

(2) 利用累乘法求得正确答案.

【详解】(1) 依题意, $a_1=1, a_{n+1}-a_n=2n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$

$$= 1 + 1 + 3 + \cdots + (2n-3)$$

$$= 1 + \frac{(1+2n-3)(n-1)}{2} = 1 + (n-1)^2$$

$$= n^2 - 2n + 2 (n \geq 2),$$

$a_1=1$ 也符合上式, 所以 $a_n = n^2 - 2n + 2$.

(2) 依题意, $a_1=1, a_{n+1}=3\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \times \frac{n+1}{n}$,

$$\text{所以 } a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$= 1 \times \left(3 \times \frac{2}{1}\right) \times \left(3 \times \frac{3}{2}\right) \times \cdots \times \left(3 \times \frac{n}{n-1}\right) = n \cdot 3^{n-1} (n \geq 2),$$

$a_1=1$ 也符合上式, 所以 $a_n = n \cdot 3^{n-1}$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+1)}{2n-1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】(1) $a_n = (2n-1) \cdot 2^n$

$$(2) S_n = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6$$

【难度】0.65

【知识点】累乘法求数列通项、错位相减法求和

【分析】(1) 根据题目条件列出 $\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ，使用累乘法即可求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 使用错位相减计算数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

【详解】(1) 当 $n \geq 2$ 时， $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2^n \times \frac{3}{1} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-3} = (2n-1) \cdot 2^n$ ，

又因为 $a_1 = 2$ ，即对 $n=1$ 也成立，所以 $a_n = (2n-1) \cdot 2^n$ 。

$$(2) S_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^n \quad ①,$$

$$2S_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \cdots + (2n-1) \cdot 2^{n+1} \quad ②,$$

$$①-② \text{ 得: } -S_n = 2 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n-1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 2 + 2 \cdot \frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \cdot 2^{n+1} = (3-2n) \cdot 2^{n+1} - 6,$$

$$\text{所以 } S_n = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6.$$